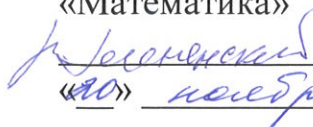


Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»

 В.Н. Деснянский
«10» ноября 2024 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Отборочный этап
9-11 класс

Задание №1

В турнире участвовало 98 шахматистов. Для игры в очередном туре их произвольным образом разбивают на пары. Проигравший в паре выбывает из турнира, а если была ничья, то оба игрока проходят в следующий тур. В случае, когда количество участников тура нечетное, то один из шахматистов «отдыхает» и проходит в следующий тур без игры. Оказалось, что единоличный победитель определился после семи туров.

Какое наибольшее число «отдыхающих» могло быть в турнире?

Задание №2

Функция $f(x)$ для всех $x, y \in R$ удовлетворяет неравенству
$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y)$$

Известно, что $f(100) = 100$.

Найдите $f(200)$

Задание №3

Числа $x, y, z, t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ удовлетворяют условно
$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 1.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина
 $\operatorname{ctgx} + \operatorname{ctgy} + \operatorname{ctgz} + \operatorname{ctgt}$?

Задание №4

Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причем коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$.

Найдите в градусах наибольший угол треугольника ABC.

Примечание: символ градуса в ответе указывать не нужно

Задание №5

Ненулевые вещественные числа a и b и острый угол β таковы, что число $\cos \beta$ является корнем уравнения $4ax^2 + bx - a = 0$, а число $\sin \beta$ – корнем уравнения $4ax^2 - bx - 3a = 0$.

Чему равен в градусах угол β ?

Примечание: символ градуса в ответе указывать не нужно

Задание №6

Квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 2$

Найдите $f(1)$, если известно, что $g(1) = 2$, $f(5) = 7$, $g(5) = 2$

Задание №7

В тетраэдре ABCD медиана AE грани ABC перпендикулярна ребру BD, а медиана AF грани ABD перпендикулярна ребру BC.

Найдите в градусах угол между ребрами AB и CD.

Примечание: символ градуса в ответе указывать не нужно

Задание №8

Найдите все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполняется равенство

$$3xy + 3yz + 3xz = 3 + 5xyz$$

В ответе указать число таких троек

Задание №9

В ящике лежат красные и черные носки. Если из ящика наудачу вытягивается 2 носка, то вероятность того, что они оба красные, равна 0,5.

Каково минимальное возможное число носков в ящике?

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД

Решения к заданиям отборочного этапа

Задание 1

В предпоследний тур не могло пройти больше 4 шахматистов, так как иначе они не смогли бы за два тура выявить победителя. С другой стороны, в каждом туре вылетает не более половины участников, поэтому к шестому туру останется не менее $\frac{98}{25} = 3\frac{1}{16}$ шахматистов. Стало быть, в шестом (=предпоследнем туре) играло ровно четверо, тогда в последних двух турах не было «отдыхавших», равно как не могло быть в первом туре. Следовательно, туров, в которых они могли быть не больше четырех.

Ответ: 4 «отдыхавших»

Задание 2

При $x=\sqrt{20}$, $y=40$ получаем, что $f(100)\geq f(140)$, а при $x=\sqrt{220}$, $y=-40$ получаем $f(140)\geq f(100)$. Следовательно $f(100)=f(140)$. Далее, для $x=\sqrt{20}$, $y=60$ получаем: $f(200)\geq f(140)$. Таким образом, $f(140)=f(200)$. И так $f(100)=f(140)=f(200)$.

Ответ: $f(200)=100$

Задание 3

Имеем, что $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{2\cos^2 x}{\sin 2x} \geq 2\cos^2 x$. Поэтому $ctgx + ctgy + ctgz + ctgt \geq 2(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t) = 2$. Значит эта сумма не меньше 2. С другой стороны, если $x = y = \frac{\pi}{4}$, $z = t = \frac{\pi}{2}$, то получим, что $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = 1$, $ctgx + ctgy + ctgz + ctgt = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$. Поэтому наименьшее значение равно 2.

Ответ: {2}

Задание 4

Так как углы $\angle AEB + \angle BEC = 180^\circ$, то эти углы не могут быть разными углами подобных треугольников ABE и BEC, т.е. эти углы равны и BE – перпендикуляр. Возможны два варианта: $\angle ABE = \angle CBE$ или $\angle ABE = \angle BCE$ первый вариант отпадает, так как в первом случае $\triangle ABE = \triangle CBE$. Остается второй вариант. В этом случае $\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике ABC катеты относятся как $1:\sqrt{3}$. Поэтому углы равны $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Ответ: 90°

Задание 5

По условию $4a\cos^2\beta + b\cos\beta - a = 0$ и $4a\sin^2\beta - b\sin\beta - 3a = 0$. Сложим эти равенства: $4a(\sin^2\beta + \cos^2\beta) - b(\sin\beta - \cos\beta) - 4a = 0$.

Отсюда $b(\sin\beta - \cos\beta) = 0$ и так как $b \neq 0$, то $\sin\beta = \cos\beta$, т.е. $\beta = 45^\circ$. Нужно проверить, что при $\beta = 45^\circ$ указанные равенства возможны. Подставляя

$\beta = 45^\circ$, получаем $a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0$. Это возможно, если $a = 1, b = -\sqrt{2}$.

Ответ: 45°

Задание 6

Рассмотрим квадратный трехчлен $h(t) = 2g(x) - f(x)$. Из соотношений, заданных в условии задачи, следует что числа 2 и 3 являются корнями этого квадратного трехчлена. Поэтому: $2g(x) - f(x) = a(x - 2)(x - 3)$, где a старший коэффициент этого трехчлена. Подставляя в это равенство $x = 5$, получим, что $2 \cdot 2 - 7 = 2g(5) - f(5) = a(5 - 2)(5 - 3) = 6a$. Отсюда $a = -\frac{1}{2}$. Подставляя в то же равенство $x = 1$, найдем $2 \cdot 2 - f(1) = -\frac{1}{2}(1 - 2)(1 - 3) = -1$, поэтому

$f(1) = 5$.

Ответ: $f(1) = 5$.

Задание 7

Обозначим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Тогда имеем: $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Векторы, идущие по медианам равны $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ и $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$. Тогда их условия перпендикулярно $E \perp BD$ и $AF \perp BC$ получим $(\vec{b} + \vec{c})(\vec{d} - \vec{b}) = 0$ и $(\vec{b} + \vec{d})(\vec{c} - \vec{b}) = 0$. Раскрыв скобки в скалярном произведении и вычтя из первого равенства второе, получим $2(\vec{b}\vec{d} - \vec{b}\vec{c}) = 0$, т.е. $\vec{b}(\vec{d} - \vec{c}) = 0$ это значит что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны, т.е. угол равен 90° .

Ответ: $\{90^\circ\}$.

Задание 8

Поскольку уравнение симметрично относительно x, y, z , найдем все решения с условием $x \leq y \leq z$ — это будет ответ с точностью до перестановки значений переменных.

При $x, y, z \in \mathbb{N}$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 5 + \frac{3}{xyz}$$

1) При $x \geq 2, y, z \geq 2 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} < 5 < 5 + \frac{3}{xyz}$. Значит решений нет

2) При $x = 1$ имеем $3\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 2 + \frac{3}{yz}$. При $y, z \geq 3$ имеем

$3\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 < 2 + \frac{3}{yz}$, т.е. решений нет. Поэтому или $y = 1$, или $y = 2$. Если $y = 1$, то $3 + \frac{3}{z} = 2 + \frac{3}{z} \Rightarrow$ решений нет. Если $y = 2$, то $\frac{3}{2} + \frac{3}{z} = 2 + \frac{3}{2z} \Leftrightarrow z = 3$. Таким образом, $x = 1, y = 2, z = 3$. А тогда в силу симметрии x, y, z будем иметь шесть решений, так как $3! = 6$.

Ответ: $\{6\}$.

Задание 9

Пусть в ящике r красных и b черных носков. Вероятность того, что первый носок красный равна $\frac{r}{r+b}$ и при осуществлении этого события условная вероятность того, что второй вынутый носок тоже красный будет равна $\frac{r-1}{r+b-1}$. А тогда по условиям задачи вероятность того, что оба носка – красные, равняется $\frac{1}{2}$, или $\frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{r+b-1} = \frac{1}{2}$.

При $b > 0$ имеем $\frac{r}{r+b} > \frac{r-1}{r+b-1}$, отсюда следует

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 > \frac{1}{2} > \left(\frac{r-1}{r+b-1}\right)^2 \Rightarrow \frac{r}{r+b} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{r-1}{r+b-1}. \text{ Из первого неравенства имеем}$$

$r > \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot b = (\sqrt{2} + 1)b$. Из второго неравенства находим, что $(\sqrt{2} + 1)b > r - 1$, так что $(\sqrt{2} + 1)b + 1 > r > (\sqrt{2} + 1)b$. Для $b = 1$ получаем $2,414 < r < 3,414$. Так что $r = 3$. Поэтому если $b = 1$, то $P\{\text{два красных носка}\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. Значит минимальное число носков есть 4.

Ответ: $\{4\}$.